

Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios No. 5  
"Gertrudis Bocanegra"

Academia de Geometría y Trigonometría - Turno Matutino  
Semestre: Febrero a Junio 2023

---

## LINEAMIENTOS DE PRESENTACIÓN PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO Y/O INCORPORACIÓN A CURSO INTERSEMESTRAL

A fin de estar en posibilidad de responder de manera integral el examen extraordinario y/o incorporarte al curso intersemestral de la asignatura de Geometría y Trigonometría, es **requisito indispensable**:

1. Realizar la resolución de la guía proporcionada por la profesora.
2. Cada uno de los ejercicios que integran la guía, deberá plantear el procedimiento respectivo y la resolución correspondiente.
3. **Entregar la guía, resuelta al 100%** el día del examen extraordinario y/o el primer día del curso intersemestral en el grupo y horario asignado por las autoridades.
4. La guía, **deberá presentarse impresa, con su respectiva portada, ordenada, con el desarrollo de los procedimientos en hojas blancas, engrapada y en folder.**

### NOTAS

- a. **La guía podrás obtenerla a través de la plataforma del plantel, en tu grupo de Classroom, y/o, podrá adquirirse en la papelería de la escuela.** Recuerda que los ejercicios de la guía se deben resolver en casa previo al examen extraordinario y/o al curso intersemestral ya que es el requisito indispensable para incorporarse a dichas opciones de acreditación.
- b. Se cuidadoso y respetuoso de las fechas y horarios que te sean asignados para presentar el examen extraordinario y/o el curso intersemestral. sólo habrá una tolerancia máxima de 10 minutos máximo, para incorporarse.
- c. Se debe tener el 100% de asistencia, no hay justificación por inasistencia, bajo ninguna circunstancia. De igual manera, no hay tiempo de tolerancia.
- d. **No dar cumplimiento a las indicaciones de resolver y entregar la guía resuelta íntegramente, anula la posibilidad de incorpórate a cualquiera de las dos opciones de acreditación extraordinaria.**
- e. **La guía que no cumpla con los requisitos** de que cada ejercicio contenga el procedimiento correspondiente en su resolución y el señalamiento del resultado obtenido, **no será recibida y se perderá el derecho a la opción de acreditación correspondiente.**
- f. **La máxima calificación por obtener es 7 (siete).** Tomando en consideración que todos los ejercicios del examen sean resueltos correctamente. La calificación que se considerada como mínima aprobatoria, es 6 (seis).
- g. En cuanto a la entrega de calificaciones obtenidas, en el caso del examen extraordinario, serán publicadas por la autoridad correspondiente; para efectos del curso intersemestral, se harán del conocimiento del estudiante **al concluir el curso.** En ambos casos debió haberse cumplido con el requisito previo e indispensable de entregar la guía resuelta correctamente y de manera íntegra (100%).



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA  
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR  
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN TECNOLÓGICA INDUSTRIAL Y DE  
SERVICIOS CENTRO DE ESTUDIOS TECNOLÓGICOS, INDUSTRIAL Y DE SERVICIOS  
No. 5 "GERTRUDIS BOCANEGRA"

ACADEMIA DE:  
**GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA**

NOMBRE DEL ALUMNO: \_\_\_\_\_ GRUPO: \_\_\_\_\_

**GUIA DE ESTUDIOS  
PARA CURSO DE RECUPERACIÓN  
2023**

<b>COMPETENCIAS GENERALES Y ATRIBUTOS</b>
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
<b>COMPETENCIA DISCIPLINAR</b>
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

**PROFESORES: Jenny Noemi Núñez López  
María de Jesús Almaraz Servín  
David Cortes Abad**

## Objetivo de las Matemáticas en la Educación Media Superior

Que el estudiante aplique conocimientos matemáticos en la resolución de problemas de distintos contextos (social, natural, científico y tecnológico, entre otros).

### Geometría y Trigonometría

#### Propósito Formativo

El estudiante interprete y resuelva problemas contextualizados que requieran la orientación espacial, a través del análisis, representación y solución por medio de figuras y procedimientos geométricos y algebraicos.

Aprendizajes Clave de la asignatura de Geometría y Trigonometría		
Eje	Componente	Contenido central
Del tratamiento del espacio, la forma y la mediada, a los pensamientos geométrico y trigonométrico	Estructura y transformación: elementos básicos de Geometría.  Trazado y angularidad: elementos de la Trigonometría plana.	<ul style="list-style-type: none"><li>• Conceptos fundamentales del espacio y la forma, “lo geométrico”.</li><li>• El estudio de las figuras geométricas y sus propiedades.</li><li>• Tratamiento de las fórmulas geométricas para áreas y volúmenes.</li><li>• Tratamiento visual de las propiedades geométricas, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.</li><li>• Conceptos básicos de lo trigonométrico.<ul style="list-style-type: none"><li>• Usos y funciones de las relaciones trigonométricas en el triángulo.</li></ul></li><li>• Funciones trigonométricas y sus propiedades.</li><li>• Medidas de ángulos y relaciones trigonométricas.</li><li>• Del círculo unitario al plano cartesiano.<ul style="list-style-type: none"><li>• Una introducción de las razones de magnitudes a las funciones reales.</li></ul></li></ul>

## DE LA MATERIA DE GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA 2023

A fin de estar en posibilidad de responder de manera integral el examen del curso de recuperación de la asignatura de Geometría y Trigonometría, es **requisito indispensable**:

1. **Accesar a la plataforma de Classroom y ser integrante del grupo de Geometría y Trigonometría, así como realizar y entregar las actividades en tiempo y forma, de acuerdo con lo solicitado en la plataforma.**
2. **Realizar y concluir los ejercicios y actividades de la guía proporcionada por los profesores en la plataforma de Classroom.**
3. **Cada uno de los ejercicios que integran la guía, deberá plantear el procedimiento respectivo y la resolución correspondiente y contar con la validación del profesor a cargo del curso.**
  4. **La guía, deberá subirse a la plataforma, con su respectiva portada, ordenada y con el desarrollo de los procedimientos en formato PDF.**
5. **Para poder presentar el Examen del curso de manera presencial, es requisito indispensable que el estudiante tenga el aval del profesor que el estudiante ha concluido completa y correctamente las actividades en Classroom.**
6. **El estudiante deberá presentarse en tiempo y forma al examen, de acuerdo con el horario y día indicado por las autoridades, teniendo como máximo 10 minutos de tolerancia a partir de la hora señalada para su aplicación.**
7. **Deberá presentar el examen con los siguientes materiales mínimo necesarios para resolverlo: juego geométrico (Regla, escuadra, compas y transportador perigonal); así como una calculadora científica.**
8. **La calificación mínima aprobatoria del curso es de 6 (seis).**
9. **La calificación máxima aprobatoria del curso es de 7 (siete).**

# CENTRALES DE GEOMETRIA Y TRIGONOMETRÍA

## ANGULOS

Reforzamiento de los contenidos centrales vistos en el primer parcial.

### INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRIA EUCLIDIANA.

#### CONCEPTOS BASICOS

##### ***Geometría:***

Es la ciencia que estudia las propiedades de las formas o figuras.

Para su estudio se divide en:

- *Geometría plana:* La que estudia a las figuras en dos dimensiones.
- *Geometría del espacio:* La que estudia a las figuras en tres dimensiones.
- *Geometría analítica:* La que analiza algebraicamente a las figuras geométricas sobre un sistema de coordenadas.
- *Geometría descriptiva:* La que estudia los cuerpos por sus proyecciones sobre los planos.

##### ***Medir:***

Es encontrar la relación que existe entre dos magnitudes en donde una de ellas se considera como unidad.

#### RECTA.

##### ***Línea:***

Sucesión continua e indefinida de puntos en una sola dimensión: la longitud.

##### ***Recta:***

Línea que tiene todos sus puntos en una misma dirección.

##### **Clasificación:**

##### ***Líneas:***

Las líneas se clasifican en:

- *Recta,*
- *Curva,*
- *Quebrada y*
- *Mixta.*

##### ***Rectas:***

Las rectas pueden ser:

- *Paralelas,*
- *Perpendiculares,*
- *Oblicuas y*
- *Convergentes – divergentes.*

# ÁNGULOS.

Es la abertura comprendida entre dos rectas que se cortan en un punto. Las rectas son los lados del ángulo y el punto donde se cortan es su vértice.

## **Clasificación de los ángulos:**

### ***Por su medida:***

Se clasifican en:

- *Agudo:*  
El que es menor que un ángulo recto.
- *Recto:*  
El ángulo formado por dos semirrectas perpendiculares entre sí.
- *Obtuso:*  
El que es mayor que un ángulo recto.
- *Colineal o llano:*  
El que es igual a dos ángulos rectos. Es aquel en que los lados son prolongación el uno del otro, formando una línea recta.
- *Entrante:*  
El que es mayor que dos ángulos rectos, pero menor que cuatro.
- *Perígono o perigonal:*  
El que es igual a cuatro ángulos rectos.

EJERCICIO QUE REALIZA		RESULTADO
Ángulo	Vértice lado:	
1.- 60°	Derecho	
2.- - 60°	Derecho	
3.- -120°	Izquierdo	
4.- 87°	Izquierdo	
5.- 25°	Derecho	

**Por su posición:**

Se clasifican en:

- *Adyacentes:*

Los ángulos que tienen un lado común y son exteriores uno del otro.

- *Complementarios:*

Ángulos adyacentes que suman un ángulo recto.

- *Suplementarios.*

Ángulos adyacentes que suman dos ángulos rectos.

- *Conjugados:*

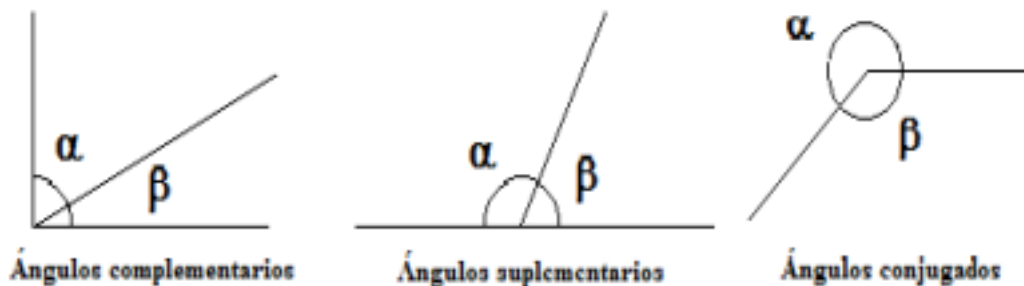
Ángulos adyacentes que suman cuatro ángulos rectos. Ángulos que forman un perígono.

- *Opuestos por el vértice:*

Dos ángulos que tienen un vértice común y cuyos lados de uno son la prolongación de los lados del otro.

- *Consecutivos:*

Dos ángulos se llaman consecutivos cuando tienen un lado común que separa a los otros dos lados.



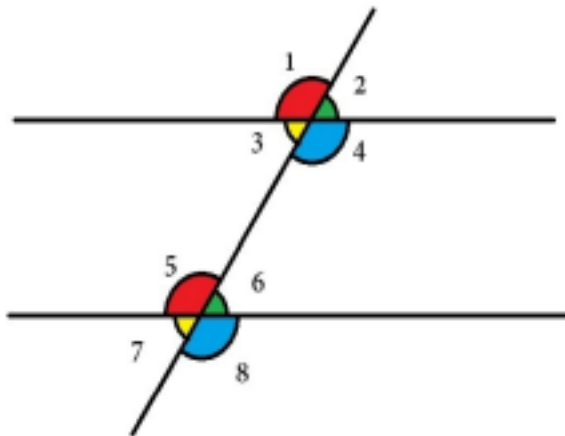
EJERCICIO PARA RESOLVER	PROCEDIMIENTO Y RESULTADO
6.  $50^\circ$ $3x$ $x$	
7.  $5x + 4$ $9x + 5$  $2x + 3$ $8x$	
8.  $3x + 11$ $4x + 15$  $2x + 10$ $5x + 18$	

9 .  2x 50°	
10.  $6\text{◊}^! + 2\text{◊} - 3\text{◊}^! + 6\text{◊} - 11$	

### Ángulos formados por dos paralelas cortadas por una transversal:

Para comprender mejor el tema se sugiere ver el video:

<https://www.youtube.com/watch?v=m1WcxcDINAY>



**Ángulos alternos internos:** son los que están entre las líneas paralelas y a distinto lado de la secante, son los ángulos 4y5 y 3y6 del dibujo. Cada pareja de ángulos tiene la misma medida.

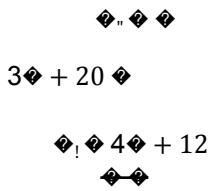
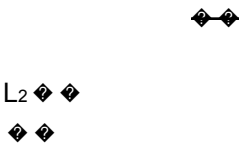
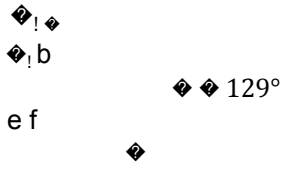
**Ángulos alternos externos:** igual que los anteriores pero en la parte externa de las paralelas. Son los ángulos 1y8 y 2y7.

**Ángulos correspondientes:** son los que se encuentran en el mismo lado de las paralelas y de la secante. En el dibujo serían 1y5, 3y7, 2y6, 4y8.

Para comprender mejor la solución de los ejercicios, se sugiere ver el video:

<https://www.youtube.com/watch?v=IAD0o1DD0-w>



EJERCICIOS PARA REALIZAR	PROCEDIMIENTO Y RESULTADO
<p>11</p> 	
<p>12</p> <p><math>L_1 82^\circ</math></p> 	
<p>13</p> 	
<p>14</p> <p>a b</p> <p>x + y c</p> <p>d <math>100^\circ</math></p> <p>2x - y e</p>	

## Sistema de Medición de Ángulos

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad. Existen tres sistemas de medición que son:

### Sistema sexagesimal.

Basado en la división de la circunferencia en 360 partes iguales. Cada división de la circunferencia se llama grado. Un ángulo de un grado tiene el vértice en el centro del círculo y sus lados pasan por dos divisiones consecutivas. Cada grado se subdivide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Es el sistema más utilizado.

### Sistema centesimal.

Basado en la división de la circunferencia en 400 partes iguales. Cada división de la circunferencia se llama grado centesimal. Un ángulo de un grado centesimal tiene el vértice en el centro del círculo y sus lados pasan por dos divisiones consecutivas. Cada grado se subdivide en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

### Sistema circular o cíclico.

Basado en la medida comparativa de un arco de círculo al radio de este. La unidad de este sistema es el radián. Un radián es el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia y tiene como vértice el centro del círculo.

### Relación entre los sistemas sexagesimal y circular o cíclico.

Debemos considerar los siguientes puntos:

- En un círculo el ángulo perigonal equivale a cuatro rectos o  $360^\circ$ , en el sistema sexagesimal.
- El perímetro del círculo es la circunferencia cuya longitud es  $2\pi r$ , donde  $r$  es el radio del círculo.
- El ángulo en radianes en el sistema circular es la razón entre el arco de círculo a su radio, por lo que el ángulo perigonal dividido por el radio equivale a  $2\pi r/r = 2\pi$  radianes. • La relación entre ambos sistemas para un ángulo perigonal es la siguiente:  $360^\circ = 2\pi$  radianes.
- De esta relación se tiene que  $180^\circ = \pi$  radianes.
- En consecuencia podemos determinar qué:
  - $1$  radián  $= 180^\circ/\pi$  y
  - $1^\circ = \pi$  radianes/180.

### 3.5. Conversion de Grados sexagesimales a radianes y viceversa:

<https://www.youtube.com/watch?v=S5xmJTmqQFA>

*De ángulos en radianes en fracción común a ángulos en grados sexagesimales:*

Formula:  $^\circ$

$$\diamond\diamond\diamond^\circ = \frac{\diamond\diamond\diamond}{\diamond}$$

Ejemplo: Convertir el ángulo a grados sexagesimales.

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Solución: Puede aplicarse una regla de tres:

$$180^\circ - \pi : : \alpha \text{ radianes} - x^\circ$$

y despejar  $x$ .

$$\frac{3}{\pi} * 180 = \frac{3\pi}{2} * x$$

$$x = \frac{3 * 180}{\pi * 2} = \frac{270}{\pi}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 540 & & \\
 & & & & \pi & & \\
 & & & & \leftarrow & & \\
 & & & & & & 180 = = = = = \\
 & & & & & & \pi \pi \\
 x & \frac{rad}{\pi} & \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} & & & \\
 \alpha & & & & \pi & & \\
 & rad & rad & & & & 
 \end{array}$$

**3.5.3 De ángulos en grados sexagesimales a ángulos en radianes en fracción decimal:**

*Ejemplo:* Convertir el ángulo  $\alpha = 92^\circ$  a radianes en fracción decimal. *Solución:* Puede aplicarse una regla de tres:

$$180^\circ - \pi : : \alpha^\circ - x \text{ radianes}$$

y despejar  $x$ .

9

En esta conversión se utiliza el valor numérico de  $\pi = 3.1416$  (redondeado a cuatro cifras decimales).

$$\begin{array}{cccc}
 & & \leftarrow \alpha \pi \rightarrow & \\
 * * . rad * . & & & \\
 x_{rad} 1 6057 & & & \\
 92 3 1416 & & 92 3 1416 & \\
 & & . rad & \\
 180 = = = = & & & \\
 \leftarrow & & \leftarrow & \\
 & & 180 & 180
 \end{array}$$

**3.5.4 De ángulos en radianes en fracción decimal a ángulos en grados sexagesimales:**

*Ejemplo:* Convertir el ángulo  $\alpha = 4.7124$  radianes a grados sexagesimales.

*Solución:* Puede aplicarse una regla de tres:

$$180^\circ - \pi : : \alpha \text{ radianes} - x^\circ$$

y despejar  $x$ .

$$\begin{array}{cccc}
 \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow 270 \\
 180 & 4 7124 180 & 4 7124 180 & = = = = \\
 . rad * . * & & \pi \pi rad rad & \\
 x & & 3 1416 & \\
 \alpha & & & \\
 rad & & & 
 \end{array}$$

**Grados sexagesimales con decimales a Grados, minutos y segundos:**

[https://www.youtube.com/watch?v=E\\_RwKCiMbTc](https://www.youtube.com/watch?v=E_RwKCiMbTc)

**Ejemplo:**

$$215.3412^\circ = 215^\circ 20' 28.32''$$

*Grados, minutos y segundos*

$$215^\circ 20' 28''$$

$$0.3412 \text{ a minutos} = 0.3412 * (60) = 20.472$$

$$0.472 \text{ a segundos} = 0.472 * (60) = 28.23$$

<b>EJERCICIO PARA RESOLVER</b>	<b>PROCEDIMIENTO Y RESULTADO</b>
--------------------------------	----------------------------------

15. $215^\circ$ a radianes.	
16. $4.21$ radianes a grados sexagesimales.	
17. $\frac{3}{4} \diamond$ a grados sexagesimales.	
18. $195.3256^\circ$ a grados, minutos y segundos.	
19. $35.45^\circ$ a grados minutos y segundos.	

**POLIGONOS****TRIÁNGULOS.**

- Es la porción de plano limitado por tres rectas que se cortan dos a dos.
- El triángulo es una superficie plana trilateral; es decir, tiene tres lados y por lo tanto tres ángulos y tres vértices.

**Clasificación de los triángulos:*****Por sus lados:***

Se clasifican en:

- *Escaleno:*  
El que tiene tres lados desiguales.
- *Isósceles:*  
El que tiene dos lados iguales.
- *Equilátero:*  
El que tiene tres lados iguales.

***Por sus ángulos:***

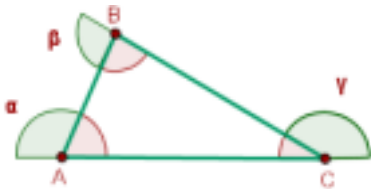
- *Acutángulo:*  
El que tiene tres ángulos agudos.
- *Recto*  
El que tiene un ángulo recto y dos ángulos agudos.
- *Obtusángulo:*  
El que tiene un ángulo obtuso y dos ángulos agudos.

**Teoremas relativos a los triángulos.**

*Teorema 1.*

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180 grados.

**Es importante que revise y transcriba en su cuaderno el siguiente video para su mayor comprensión.** <https://www.youtube.com/watch?v=mim05Nfu5KM>



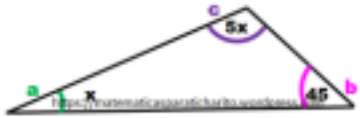
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a  $180^\circ$ .

$$A + B + C = 180^\circ$$

Ejemplo ;

La medida del ángulo mayor de un triángulo es 5 veces la medida del ángulo menor.  
El ángulo mediano mide 45°. ¿Cuáles son las medidas de todos los ángulos?

$a = \text{ángulo menor}$        $b = \text{ángulo mediano}$        $c = \text{ángulo mayor}$   
 $a = x$                                $b = 45^\circ$                                $c = 5x$



$5x + x + 45 = 180$                                $c = 5x$   
 $6x + 45 = 180$                                    $c = 5(22.5)$   
 $6x = 180 - 45$                                    $c = 112.5$   
 $6x = 135$   
 $x = 22.5$

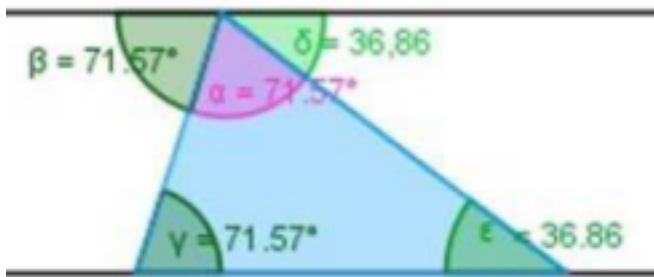
El ángulo menor  $a = 22.5^\circ$       El ángulo mediano  $b = 45^\circ$       El ángulo mayor  $c = 112.5^\circ$

Los ángulos que se forman en un triángulo se relacionan entre sí cumpliendo con las siguientes propiedades o características:

Es importante que revise el siguiente video para su mayor comprensión.  
<https://youtu.be/Ccn2xZiJIB8>

### Teorema 2

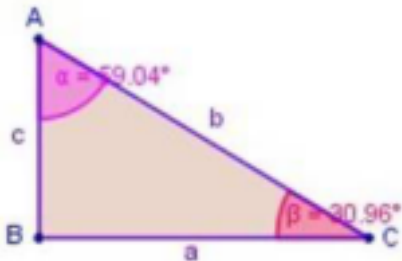
La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos; es decir, suman  $180^\circ$ . En la figura,  $\alpha + \gamma + \varepsilon = 180^\circ$ . Recordar que  $\gamma = \beta$  y que  $\varepsilon = \delta$  por ser ángulos **alternos internos**



12

### Teorema 3

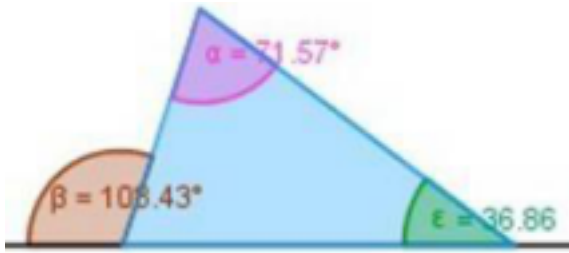
La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a  $90^\circ$ .  
En la figura,  $\alpha + \beta = 90^\circ$



### Teorema 4

En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos (opuestos).

En la figura,  $\beta = \alpha + \varepsilon$



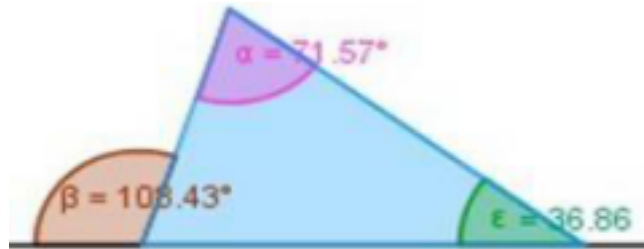
**Teorema 5**

En todo triángulo la medida de un ángulo externo es mayor que la de cualquier ángulo interior no adyacente.

En la figura,

$\beta >$  (es mayor que)  $\alpha$

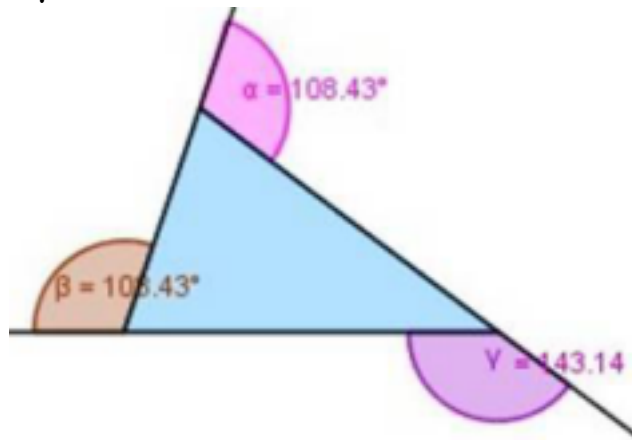
$\beta >$  (es mayor que)  $\gamma$



**Teorema 6**

La suma tres ángulos exteriores de cualquier triángulo vale cuatro ángulos rectos; es decir, suman  $360^\circ$ .

En la figura,  $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$



¿Cuál es el valor del ángulo x?  
<https://matematicasparaticharito.wordpress.com>

Partimos del triángulo de la izquierda **ABC**,  
 porque conocemos los valores de 2 de sus ángulos.

**a = 50    b = 70**

Con estos datos podemos obtener el valor del tercer ángulo **C**

$$a + b + c = 180$$

$$50 + 70 + c = 180$$

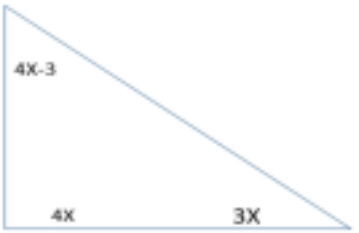
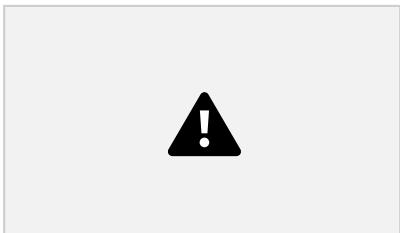
$$120 + c = 180$$

$$c = 180 - 120$$

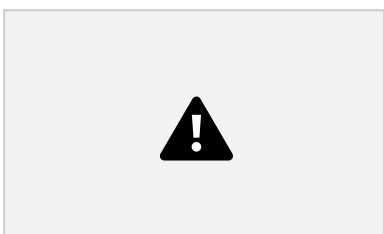
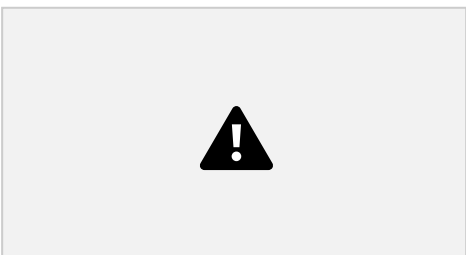
$$c = 60$$

Ejercicios de ángulos interiores	Encontrar en valor "X" y de cada uno de sus ángulos
20.	
21.	
22.	






<p>23.</p> 	
<p>24.</p> 	

Calcula la medida de los ángulos exteriores e interiores los siguientes triángulos.

Ejercicios de ángulos exteriores	Encontrar en valor de cada uno de sus ángulos
<p>25.</p> 	
<p>26.</p> 	

<p>27.</p> 	
--	--

<p>28.</p> 	
<p>29.</p> 	
<p>30.</p> 	

**Rectas notables del triángulo**

Fue Leonhard Euler (1707-1783) quien introdujo la convención para denotar las partes de un triángulo. En un triángulo  $\Delta ABC$  se denotan los lados opuestos a A, B y C con las mismas letras pero en minúscula a, b y c, respectivamente.

Los ángulos se denotan con la misma letra pero en griego:  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  respectivamente.

Las rectas notables de cualquier triángulo son:

- Medianas.
- Mediatrices.
- Bisectrices.
- Alturas

Los puntos donde se cortan las rectas notables en un triángulo son:

- Baricentro.
- Circuncentro.
- Incentro.
- Ortocentro.

**Es importante que revise el siguiente video para su mayor comprensión:**

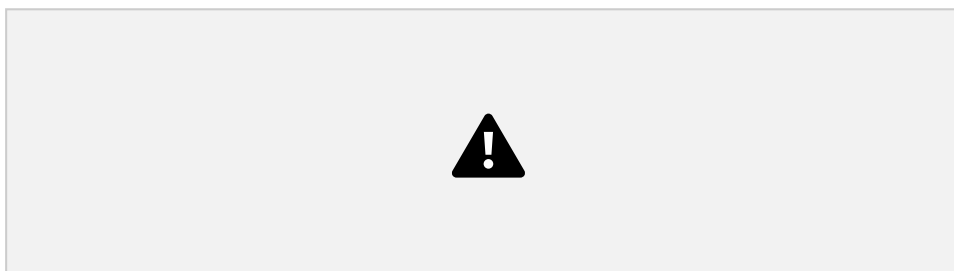
1. Rectas y puntos notables de un triángulo | Geometría – Virtual:

[https://www.youtube.com/watch?v=BQS8OxGRw\\_U](https://www.youtube.com/watch?v=BQS8OxGRw_U)

16

2. Rectas y puntos notables triángulo: <https://www.youtube.com/watch?v=rKpSeftVe6w>

**Ejemplo:**



## **Congruencia**

**Definición:**

Dos figuras geométricas se llaman congruentes si se pueden identificar una con otra al superponerlas. Por supuesto, en los triángulos identificados, todos sus elementos correspondientes, como sus lados, ángulos, alturas, medianas y bisectrices, son congruentes. Sin embargo, para determinar que dos triángulos son congruentes, no se necesita establecer la congruencia de todos sus elementos correspondientes. Basta verificar solo la congruencia de algunos de ellos.

**Criterio LAL:** Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, a dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

**Criterio ALA:** Si un lado y sus dos ángulos adyacentes en un triángulo son congruentes, respectivamente, a un lado y sus ángulos adyacentes en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

**Criterio LLL:** Si tres lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, a tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

**Ejemplo:**





17

**Es importante que revise el siguiente video para su mayor comprensión:**

1. CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS Súper fácil.

<https://www.youtube.com/watch?v=U4MTmLvK04>

EJERCICIO PARA RESOLVER	PROCEDIMIENTO Y RESULTADO
31. 	
32. 	
33.	

	
<p>34.</p> 	

## 4.6 Semejanza

### (Teorema de Tales de Mileto)

#### Definición:

Tales de Mileto fue un matemático griego que proporcionó grandes aportes a la geometría, de los cuales resaltan estos dos teoremas (en algunos textos lo escriben también como Thales) y sus útiles aplicaciones. Estos resultados han sido utilizados a lo largo de la historia y han permitido resolver una amplia variedad de problemas geométricos.

El primer y el segundo teorema de Tales de Mileto se basan en determinar triángulos a partir de otros semejantes (primer teorema) o de circunferencias (segundo teorema). Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo forma, con la prolongación de los otros dos lados otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

#### Criterios de semejanza:

Criterio 1. **(a, l, a)**: Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, entonces son semejantes. Criterio 2. **(l, a, l)**: Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

Criterio 3. **(l, l, l)**: Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente proporcionales, entonces son semejantes.

#### Ejemplo:



Es importante que revise siguiente video para su mayor comprensión:

1. TEOREMA DE TALES Súper fácil - Para principiantes.  
<https://www.youtube.com/watch?v=staL7w-eT58>
2. FIGURAS SEMEJANTES Súper fácil - Semejanza Para principiantes  
<https://www.youtube.com/watch?v=4MxChkgm370>

EJERCICIO PARA RESOLVER	PROCEDIMIENTO Y RESULTADO
<p><b>35.</b> Un triángulo tiene como medidas de sus lados 8m, 6m y 12m y otro triángulo tiene medidas 6m, 4m y 3m. ¿Son semejantes estos triángulos? ¿Cuál es la razón de semejanza?</p>	
<p><b>36.</b> ¿Es posible que dos triángulos sean semejantes, si el primero contiene ángulos que miden <math>50^\circ</math> y <math>79^\circ</math>, y el segundo, uno de <math>79^\circ</math> y otro de <math>51^\circ</math>? ¿Porqué?</p>	
<p><b>37.</b> Las medidas respectivas de los lados de un triángulo son 3 cm, 5 cm y 6 cm. Si el más corto de los lados de otro triángulo semejante mide 4 cm, encontrar la medida de cada uno de los otros dos lados. Sugerencia: Haga el dibujo de los triángulos en la posición normal y asigne sus medidas.</p>	

<p><b>38.</b> Un triángulo tiene dos lados de longitud 10cm y 6cm y el ángulo comprendido entre ellos de 100°. Otro triángulo tiene lados de 5cm y 3cm y el ángulo entre ellos dos es de 100.</p>	
<p><b>39.</b> Si un hombre de 1.75 m de altura proyecta una sombra de 3.50 m, ¿Qué sombra aproximada proyectará un poste de 8.25 m?</p>	
<p><b>40.</b> Si un árbol de 20 metros proyecta una sombra de 45 metros, ¿Qué sombra proyectará un árbol de 30 metros?</p>	
<p><b>41.</b> Un edificio de 95 metros de altura proyecta una sombra de 650 metros, un hombre quiere aprovechar esta situación para calcular su estatura, si su sombra es de 11.60 metros.</p>	
<p><b>42.</b> Una antena proyecta una sombra de 50.4 metros, y un poste de altura 2.54 metros proyecta una sombra de 4.21 metros. ¿Cuánto mide la antena?</p>	

## Teorema de

## Pitágoras

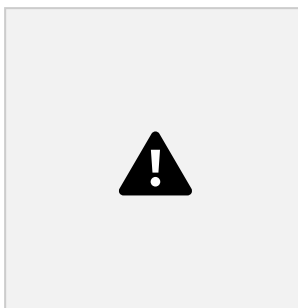
Un teorema importante para el cálculo de la longitud de los lados de un triángulo rectángulo es el teorema de Pitágoras: **“En todo triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos”**.

Es importante que revise el siguiente video para su mayor comprensión:  
<https://youtu.be/CJ8bpjhwA2k>.

La ecuación de este teorema es:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

A partir de esta ecuación puede calcularse cualquiera de los lados si se conoce la longitud de los otros dos.

*Ejemplos:*



**1.-** Calcular la hipotenusa si los catetos miden: **b** = 4 cm, **a** = 3 cm.

*Solución:* La fórmula a aplicar es:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

**2.-** Calcular el cateto **b** si la hipotenusa **c** = 5 cm y el cateto **a** = 3 cm.

Solución: La fórmula a aplicar es:





$$c^2 = a^2 + b^2$$

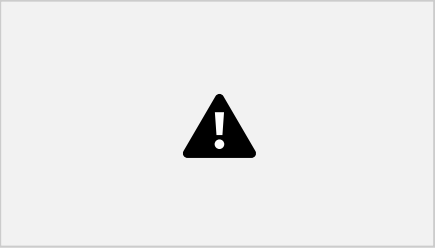



cateto **b**:

se debe despejar el

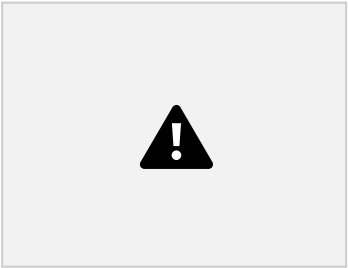

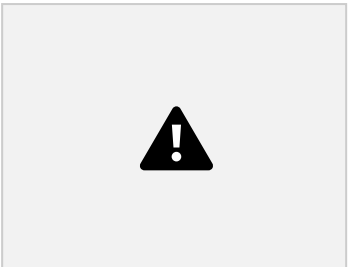

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

EJERCICIO PARA RESOLVER		PROCEDIMIENTO Y RESULTADO
43. 		
44. 		

45. 		
46. 		



47. 		
48. 		

## POLÍGONOS

### **Definiciones.**

El polígono es una **porción de plano limitado por líneas rectas.**

### ***Diagonal de un polígono.***

La **diagonal** de un polígono es el segmento de recta que une un vértice con otro que no le es consecutivo.

### ***Ángulos internos de un polígono.***

Son los ángulos formados por dos lados consecutivos.

22

### ***Ángulos externos de un polígono.***

Son los ángulos adyacentes a los ángulos interiores, obtenidos prolongando uno de los lados en un mismo sentido.

### **Clasificación de los polígonos:**

***Por el número de lados:***

Número	Nombre
--------	--------

de lados	
3	Triángulo

4	Cuadrilátero
5	Pentágono

6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono

Número de lados	Nombre
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono

Número de lados	Nombre
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octadecágono
19	Eneadecágono
20	Icoságono

**Otras clasificaciones son:**

- Polígono equilátero.
- Polígono equiángulo.
- Polígono convexo.
- Polígono cóncavo.
- Polígono regular.
- Polígono regular.

**Diagonales y ángulos internos y externos de un polígono.**

- Desde cada vértice de un polígono se pueden trazar diagonales a los vértices restantes, excepto al anterior y al posterior.
- Existen fórmulas para determinar el número de diagonales trazadas a partir de un vértice, así como el número de triángulos internos que se forman con esas diagonales. • También existen fórmulas para determinar la medida de los ángulos internos, la suma de todos ellos, y los ángulos externos de un polígono.

1. Matemática - Diagonales de un polígono:

<https://www.youtube.com/watch?v=t9VDM5sYo0k>

**Fórmulas para determinar los ángulos internos y externos, diagonales de un polígono.**

Es importante que observe el siguiente video:

1. ANGULOS INTERNOS DE UN POLIGONO REGULAR Super facil:

[https://www.youtube.com/watch?v=ku\\_GwiCfIpk](https://www.youtube.com/watch?v=ku_GwiCfIpk)

*Suma de los ángulos internos.*

La suma de los ángulos internos es:  $\Sigma i = 180^\circ (n - 2)$

*Ángulo interno.*

El valor de cada ángulo interno es:  $i = 180^\circ (n - 2) / n$

*Suma de los ángulos externos.*

La suma de los ángulos externos ( $\Sigma e$ ) siempre es igual a  $360^\circ$ .

*Ángulo externo.*

El valor de cada ángulo externo es:  $e = 360^\circ/n$ .

*Diagonales que pueden trazarse desde un vértice.*

El número de diagonales desde un vértice es:  $n_d = n - 3$

Número total de diagonales que pueden trazarse desde todos los vértices.

El número total de diagonales desde todos los vértices es:  $N_d = n(n - 3)/2$

**Ejemplos:**

1.- Calcular la suma de los ángulos internos y el valor de un ángulo interno de un hexágono. *Solución:*

Para la suma de los ángulos internos la fórmula a aplicar es:

$$\Sigma i = 180^\circ (n - 2); \text{ el número de lados es } n = 6. \therefore \Sigma i = 180^\circ (6 - 2) = 180^\circ (4) = 720^\circ.$$

Para el ángulo interno la fórmula a aplicar es:

$$i = 180^\circ (n - 2) / n \therefore i = 180^\circ (n - 2) / n; i = 180^\circ (6 - 2) / 6 = 180^\circ (4) / 6 = 720^\circ / 6 = 120^\circ$$

2.- Calcular el valor del ángulo externo de un hexágono.

*Solución:*

La fórmula aplicar es:

$$e = 360^\circ/n; \text{ el número de lados es } 6 \therefore e = 360^\circ/6 = 60^\circ$$

3.- Calcular el número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice y el número total de diagonales en un hexágono.

*Solución:*

Para el número de diagonales de un vértice la fórmula a aplicar es:

$$n_d = n - 3; \text{ el número de lados es } 6 \therefore n_d = 6 - 3 = 3 \text{ diagonales.}$$

Para el número total de diagonales la fórmula a aplicar es:

$$N_d = n(n - 3)/2, \text{ el número de lados es } 6 \therefore N_d = 6(6 - 3)/2 = 6(3)/2 = 18/2 = 9 \text{ diagonales.}$$

EJERCICIO PARA RESOLVER	PROCEDIMIENTO Y RESULTADO
49. Calcula la suma de los ángulos internos de un octágono:	
50. Calcula la suma de los ángulos internos de un pentadecágono:	

51. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyos ángulos interiores suman 2,340°?	
52. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1,620°?	

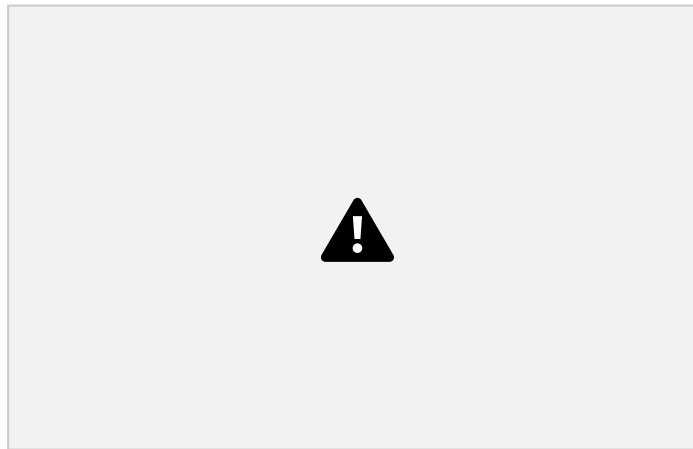
53. ¿Cuántos lados tienen los polígonos regulares cuyos ángulos interiores suman $1,080^\circ$ ?	
54. ¿Cuántos lados tienen los polígonos regulares cuyos ángulos interiores suman $1,440^\circ$ ?	
55. ¿Cuál es el área de un decágono cuyo apotema mide 5cm y cuyo lado mide 4.1 cm?	
56. ¿Cuál es el área de un pentágono cuyo apotema mide 8 cm y cuyo radio mide 9.9 cm?	

## **CIRCUNFERENCIA Y TRIGONOMETRIA**

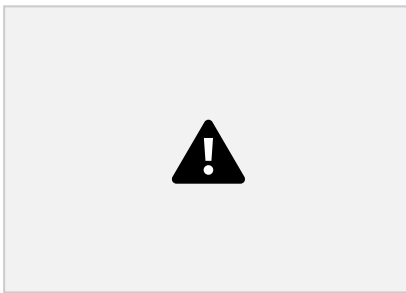
### **Circunferencia**

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan a otro punto llamado centro. Distíngase de círculo, cuyo lugar geométrico que queda determinado por una **circunferencia** y la región del plano que encierra esta.

Elementos relevantes de la circunferencia, heredados por el círculo:



- El centro es el punto equidistante a todos los puntos de una circunferencia.
- Un radio es cualquier segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. El radio también es la longitud de los segmentos del mismo nombre.
- Un diámetro es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por su centro. El diámetro también es la longitud de los segmento del mismo nombre.



- El perímetro es el contorno de la circunferencia y su longitud.

26

- Una cuerda es cualquier segmento que une dos puntos de una circunferencia. El diámetro es un cuerda de máxima longitud.
- Un arco es cualquier porción de circunferencia delimitada por dos puntos sobre esta. Se dice también que una cuerda subtiende cada arco que determinan sus extremos.
- Una flecha o sagita respecto una cuerda es el segmento de su mediatriz que hay entre esta cuerda y el arco que determina esta, sin pasar por el centro.
- Una semicircunferencia es cualquier arco delimitado por los extremos de un diámetro.

**TRIGONOMETRÍA.***Trigonometría.*

- Es la rama de la geometría métrica que se ocupa de la medida de los elementos del triángulo. El desarrollo de ésta estuvo asociado al estudio de las relaciones entre lados y los ángulos de un triángulo.
- Ciencia que estudia las relaciones que ligan los lados y los ángulos de un triángulo. • Medida de los triángulos.

*Funciones trigonométricas.*

- Son las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

**Funciones trigonométricas en de los triángulos rectángulos.**

<https://www.youtube.com/watch?v=jB190Wr1QFM>

Las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo son 6: *seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.*

Estas funciones se definen en forma general para los ángulos agudos del triángulo rectángulo. Los lados del triángulo rectángulo reciben nombres específicos como sigue:

- *Hipotenusa*: Es el lado opuesto al ángulo recto.
- *Catetos*: Son los lados que forman el ángulo recto.

Dado el triángulo rectángulo ABC, las funciones se definen como sigue:

<https://www.youtube.com/watch?v=8zVW0U2jn8U&t=276s>



$$\begin{array}{l} \text{cateto opuesto} \\ \text{hipotenusa} \\ \text{cateto adyacente} \\ a \end{array} \sin A = \frac{b}{h}$$

$$\begin{array}{l} \text{cateto adyacente} \\ a \end{array} \cos A = \frac{a}{h}$$

$$\begin{array}{l} \text{cateto opuesto} \\ \text{cateto adyacente} \\ a \end{array} \tan A = \frac{b}{a}$$

$$\begin{array}{l} \text{cateto adyacente} \\ a \end{array} \cot an A = \frac{a}{b}$$

$$\begin{array}{l} \text{hipotenusa} \\ \text{cateto adyacente} \\ h \end{array} \sec A = \frac{h}{a}$$

$$\begin{array}{l} \text{hipotenusa} \\ h \end{array} \csc A = \frac{h}{b}$$

**Ejemplos de aplicación:**

a) Una cuerda de 12 m está amarrada en lo alto de un poste de 6 m y de la punta de la cuerda a la base del poste, el Angulo  $a = 30^\circ$ . La cuerda se estira perfectamente y se amarra en el suelo hasta donde da. Indica las funciones trigonométricas directa e inversas del Triangulo rectángulo.

c.  $0 = 6\text{m}$  "a"

$h = 12\text{ m}$



c.  $a = 4$   
"b"

$$= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

**A**

cateto opuesto  $\text{sen } A = \frac{a}{h}$

$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{hipotenusa}} \text{ csc } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{h}$

cateto adyacente  $\text{cos } A = \frac{b}{h}$

$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{hipotenusa}} \text{ sec } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{h}$

cateto opuesto  $\text{tan } A = \frac{a}{b}$

$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto adyacente}} \text{ cot an } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{b}$

$$= \frac{a}{b}$$

1.- Recargamos una escalera de 5 m hasta lo alto de una pared de 3m, ¿cuál será el ángulo que forma la escalera con el suelo?

dibujamos un esquema como sigue:



Datos:

$h = 5\text{ m}$  (hipotenusa) (escalera)

$a = 3\text{ m}$  (cateto opuesto) (pared)

$A = ?$

Fórmula:

$\text{sen } A = \frac{a}{h}$

Sustitución:



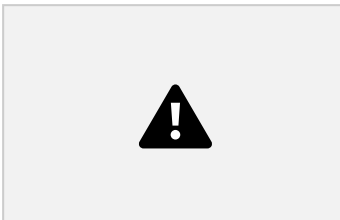
$$\begin{aligned} & 3. \\ & \text{sen } A = \frac{0.6}{5} \\ & = 0.12 \end{aligned}$$

Utilizando la calculadora con la función inversa de seno 0.6 ( $\sin^{-1}$ ) se obtiene el ángulo.

$$A = 36^{\circ}52'11''$$

29

2.- Un árbol proyecta una sombra de 20m y un cable amarrado desde la punta del árbol hasta la punta de la sombra mide 45m. ¿Qué ángulo forma el cable con el piso?, ¿cuánto mide el árbol?



*Datos:*

$h = 45\text{m}$  (hipotenusa)(cable)  
 $b = 20\text{m}$  (cateto adyacente)(sombra)

$A = ?$

$a = ?$

*Fórmula:*

$$\cos A = \frac{b}{h}$$

*Sustitución:*

$$\begin{aligned} & \frac{20}{45} \\ \cos A & = 0.4444 \end{aligned}$$

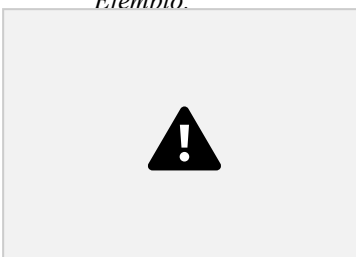
Utilizando la calculadora con la función inverso de cos 0.4444 ( $\cos^{-1}$ ) se obtiene el ángulo  
 $A = 63^{\circ}36'43''$

Para calcular la altura  $a$  se utiliza la función seno y se despeja a:

$$\begin{aligned} \text{sen } A & = \frac{a}{h} \\ \therefore a & = h \text{ sen } A = h \text{ sen } 63^{\circ}36'43'' = 45 \times 0.8958\text{m} \end{aligned}$$

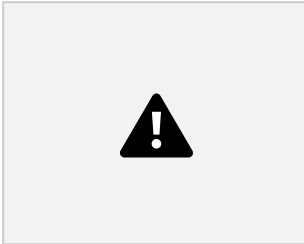
$$a = h \text{ sen } 63^{\circ}36'43'' = 45 \times 0.8958\text{m}$$


*Ejemplo.*

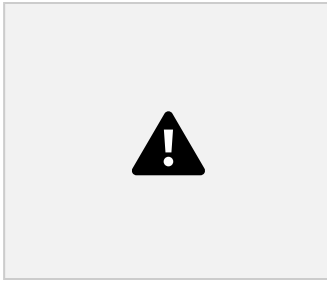



$$\begin{aligned} \text{sen } \theta & = 8/12.8 = 0.6247 \quad 38^{\circ}39'35'' \\ \cos \theta & = 10/12.8 = 0.7809 \quad 38^{\circ}39'35'' \\ \tan \theta & = 8/10 = 0.8 \quad 38^{\circ}39'35'' \end{aligned}$$

Todas dan el mismo ángulo.

EJERCICIO PARA RESOLVER	PROCEDIMIENTO Y RESULTADO
<p>57. Un árbol mide 15m, y de la punta sale un cable que se amarra al suelo hasta que forma un ángulo de <math>38^\circ</math> con el suelo. ¿cuánto mide el cable? (despeja el lado requerido de la función <math>\text{sen } A</math>).</p>	
<p>57.</p> <div style="text-align: center;">  </div>	

<p>58.</p> <div style="text-align: center;">  </div>	
<p>59. ¿Calcula el valor natural del siguiente ángulo? Seno <math>43^\circ 40'</math></p>	
<p>60. ¿Calcula el valor natural del siguiente ángulo? Coseno <math>54^\circ 10'</math></p>	
<p>61. Dado el valor de la función trigonométrica, calcula el ángulo al cual corresponde: Seno <math>x = 0.4268</math></p>	
<p>62. Dado el valor de la función trigonométrica, calcula el ángulo al cual corresponde: Cotangente <math>85^\circ</math></p>	

<p>63.</p> 	
<p>64.</p> 	
<p>65. En un triángulo rectángulo un ángulo mide <math>40^\circ</math>, y el cateto opuesto mide 8 cm. determina los otros ángulos y lados.</p>	

## BIBLIOGRAFÍA.

- Matemáticas II, Autor Ibáñez Patricia, García Gerardo, Edit. CENGAGE.
- Matemáticas II, Autor Cuellar Juan Antonio, Edit. Mac Graw Hill.
- Matemáticas II, Autor Méndez Hinojosa Arturo, Edit. Santillana.
- RIVERA, Enrique. Geometría y Trigonometría. México D.F. Ed. Gafra. 2012. 211 p.

## FUENTES DE INFORMACIÓN

- <https://www.youtube.com/watch?v=GeSiN6vpNS0>
- <https://www.youtu.be/Ccn2xZiJIB8>
- [https://www.youtube.com/watch?v=BQS8OxGRw\\_U](https://www.youtube.com/watch?v=BQS8OxGRw_U)
- <https://www.youtube.com/watch?v=rKpSeftVe6w>
- <https://www.youtube.com/watch?v=U4MTmLvKQ4>
- <https://www.youtube.com/watch?v=staL7w-eT58>
- [https://www.youtube.com/watch?v=E\\_RwKCiMbTc](https://www.youtube.com/watch?v=E_RwKCiMbTc)
- <https://www.youtube.com/watch?v=S5xmJTmqQFA>
- <https://www.youtube.com/watch?v=4MxChkgm370>
- <https://www.youtube.com/watch?v=t9VDM5sYo0k>
- [https://www.youtube.com/watch?v=ku\\_GwiCf1pk](https://www.youtube.com/watch?v=ku_GwiCf1pk)

□ <https://www.youtube.com/watch?v=jB190Wr1QFM>

□ <https://www.youtube.com/watch?v=8zVW0U2jn8U&t=276s>